

ΤΑΞΗ Γ΄

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

- | | |
|--|--|
| 1) $(\chi - 3)^2$ | 2) $(2\chi + \omega)^2$ |
| 3) $(5\chi + 3\omega) \cdot (3\omega - 5\chi)$ | 4) $(2\psi^2 - 5)^2$ |
| 5) $(-5\chi^3 - 2\psi)^2$ | 6) $\left(7 - \frac{2\psi^3}{5}\right) \cdot \left(\frac{2\psi^3}{5} + 7\right)$ |

2. Αν $\chi = \frac{2}{\psi}$ να βρείτε την αριθμητική τιμή της πιο κάτω παράστασης.

$$(2\psi - 3\chi)^2 - 4(\psi - 2\chi)(\psi + 2\chi) - 25\chi^2 + 3 =$$

3. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $\chi - 2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $\chi^3 - 8$.

4. Να αποδείξετε την πιο κάτω ταυτότητα:

$$(\chi + 4)^2 + (2\chi + 3)^2 = \chi^2 + (2\chi + 5)^2$$

5. Να κάνετε τις πράξεις και μετά να βρείτε την αριθμητική τιμή του αποτελέσματος για $\chi = -2$

$$(2\chi + 1)^3 - 2\chi(3\chi + 1) \cdot (3\chi - 1) - (3\chi - 2)^2$$

6. Αν $\chi = \frac{1}{\psi}$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης :

$$A = (5\chi - \psi)^2 - (5\chi - 3)(5\chi + 3) + 4\psi - (\psi + 2)^2$$

7. Αν $2\chi + \phi = -5$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = (2\chi - \phi)^2 + 7\chi\phi - \chi(2 - \phi) + 2\chi$$

8. Αν $2\alpha - \beta = 7$ και $\alpha\beta = 10$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $4\alpha^2 + \beta^2$.

9. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(3\alpha + 2\beta)^2 - 5(\alpha - 2\beta)(\alpha + 2\beta) - 3\beta(8\alpha + 5\beta) = (2\alpha - 3\beta)^2$$

B. ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ- ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ-ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

1. Να παραγοντοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

$4\chi + 4\psi + 8\omega$	$16\psi^2 - 9$
$3\chi - 3\psi - \omega\chi + \omega\psi$	$-\psi^2 + 8\psi - 15$
$9\chi^2 - 16\psi^2$	$\alpha\beta^2 - 6\alpha\beta - 5\beta + 30$
$\chi^2 - \chi - 30$	$\chi^3 - 9\chi$
$25\chi^2 + 40\chi + 16$	$\chi^3 - 8$
$\psi^3 - 25\psi$	$4\chi^2 - 12\chi + 9$
$16\alpha^2 - 49\beta^2$	$\chi^2 - \psi^2 + \chi + \psi$

2. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

- | | |
|---|--|
| 1) $\alpha(\alpha - 2) - \beta(\beta - 2)$ | 2) $\chi^2 - 6\chi + 9 - 2\beta\chi + 6\beta$ |
| 3) $(\chi - 3\omega)^2 + (\chi - 3\omega) - 6$ | 4) $\chi^2 - 6\psi - 1 - 9\psi^2 + 4 - 4\chi$ |
| 5) $16\chi^4 - 81\psi^4$ | 6) $3\rho^2 - 3\omega^2 - \omega^2 - 2\rho\omega - \rho^2$ |
| 7) $\alpha^2(\alpha - 5) + (\alpha - 5)(3\alpha - 2) - 25 + \alpha^2$ | 8) $\chi^2 - 6\chi\psi + 9\psi^2 - 4\omega^2$ |
| 9) $(\chi^2 - 6\chi + 3)^2 - (\chi - 9)^2$ | 10) $4(\chi - 1) + 9\chi^2(1 - \chi)$ |

3. Χρησιμοποιώντας πλήρη παραγοντοποίηση σε γινόμενο ή με άλλο τρόπο να βρείτε τη τιμή του πολυωνύμου $A = 2\chi^3 + 6\chi\psi^2 - 2\psi^3 - 6\chi^2\psi$ για $\chi=101$ και $\psi=99$.

4. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1) $\frac{\chi^2 - 25}{2\chi - 10}$ | 2) $\frac{5\alpha^2\beta - 5\alpha\beta^2}{\alpha^3\beta - \alpha\beta^3}$ |
|-------------------------------------|--|

5. Να κάνετε τις πράξεις:

- | | |
|---|---|
| 1) $\frac{\chi\psi^2}{\chi^2 + 3\chi - 18} \cdot \frac{4\chi + 24}{\chi\psi}$ | 2) $\frac{\chi^2 - 8\chi + 12}{\chi^2 - 36} : \frac{3\chi - 6}{\chi^2 + 5\chi - 6}$ |
| 3) $\frac{2\chi}{\chi^2 - 25} + \frac{1}{5 - \chi} - \frac{3}{\chi^2 + 5\chi}$ | 4) $\frac{3\chi^2 - 3}{\chi^3 + \chi^2 - 2\chi} : \left(\frac{3}{\chi^2 - 4} + \frac{1}{\chi + 2} \right)$ |
| 5) $\frac{\alpha^5 - \alpha^3}{\beta - 6} \cdot \frac{\beta^2 - 6\beta}{\alpha^4\beta + \alpha^3\beta} =$ | |

6. Να γίνουν απλά τα σύνθετα κλάσματα:

$$1) \frac{\frac{\chi - 9\psi}{\psi} - \frac{\chi}{\chi^2 - 6\chi}}{\psi^2 + 9}$$

$$2) \frac{\frac{\chi^2 - 16}{\chi^2 + 3\chi - 4}}{\frac{\chi^2 - 4\chi}{\chi^2}}$$

$$3) \frac{\frac{\chi^2 - 10\chi + 25}{\chi^3 - 5\chi^2}}{\chi - \frac{25}{\chi}} =$$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$1) \chi^2 - 8\chi = 0$$

$$2) \chi^2 - 64 = 0$$

$$3) \chi^2 - 2\chi = 15$$

$$4) (\chi + 5)(\chi^2 - 2\chi - 3)(2\chi - 5) = 0$$

$$5) 3\alpha^2 + 4\alpha - 7 = 0$$

$$6) 25\psi^2 - 20\psi + 4 = 0$$

8. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$1) \frac{\chi-2}{\chi} + \frac{4}{\chi-2} = \frac{8}{\chi^2-2\chi}$$

$$2) \frac{y+2}{y} = \frac{y+3}{y+4} - \frac{4}{y^2+4y}$$

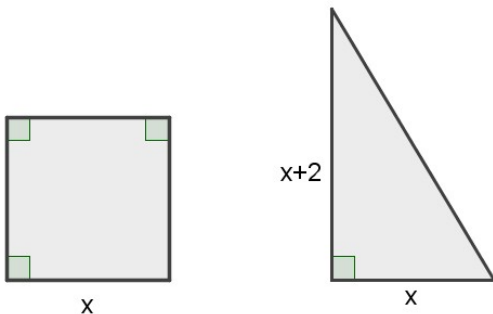
$$3) \frac{3}{y+5} - \frac{y}{y-5} = \frac{y^2+25}{25-y^2}$$

$$4) \frac{2x}{y^2+y} = 1 - \frac{2}{y+1}$$

$$5) \frac{\rho}{\rho-1} + \frac{6}{\rho^2-1} = 4$$

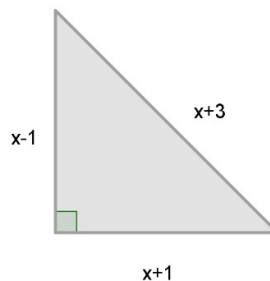
$$6) \frac{3}{\omega^2-3\omega-4} = \frac{2\omega+5}{\omega^3+2\omega^2+\omega} + \frac{4}{\omega^2-4\omega}$$

9. Ένα οικόπεδο έχει σχήμα ορθογώνιο εμβαδόν 150 τετραγωνικά μέτρα. Αν το μήκος του είναι 5 μέτρα μεγαλύτερο από το πλάτος του, να βρείτε πόσα μέτρα συρματοπλέγμα χρειάζονται για την περιφράξη του.
10. Το ορθογώνιο τρίγωνο και το τετράγωνο του διπλανού σχήματος έχουν το ίδιο εμβαδόν. Να υπολογίσετε το χ .



11. Το ορθογώνιο τρίγωνο και το τετράγωνο του διπλανού σχήματος έχουν το ίδιο εμβαδόν. Να υπολογίσετε το χ .

Να βρείτε τη τιμή του χ στο διπλανό σχήμα.



Γ. ΙΣΑ ΤΡΙΓΩΝΑ- ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

1. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ , αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Λ , αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

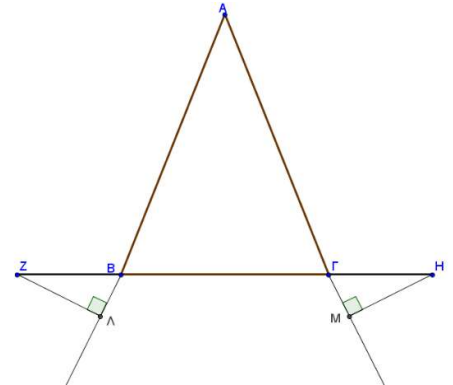
1) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα .	Σ	Λ
2) Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.	Σ	Λ
3) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, και έχουν μια γωνία αντίστοιχα ίση τότε απαραίτητα θα είναι ίσα.	Σ	Λ
4) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια γωνία ίση μία προς μία, και έχουν μια κάθετη πλευρά τους αντίστοιχα ίση τότε απαραίτητα θα είναι ίσα.	Σ	Λ

2. Να δείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος ΑΔ είναι ύψος και διχοτόμος.

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Αν M και L είναι μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα να δείξετε ότι:

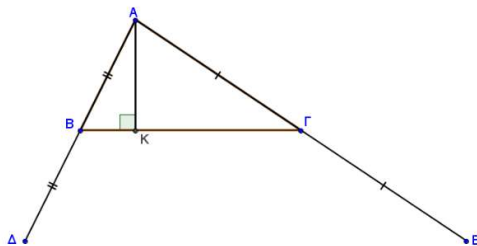
- 1) $BL = \Gamma M$.
- 2) Τα M και L απέχουν ίση απόσταση από την πλευρά $B\Gamma$.

4. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) προεκτείνουμε τη βάση $B\Gamma$ κατά τμήματα $BZ=\Gamma H$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν ZL και HM αποστάσεις από τις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα να δείξετε ότι $ZL=HM$.

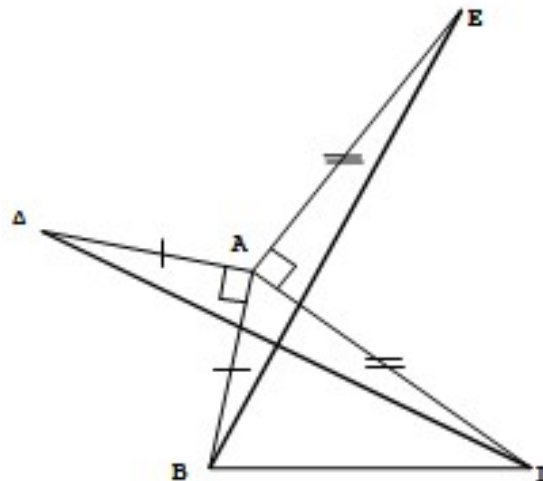


5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$). Αν K, L, M είναι μέσα των πλευρών $AB, B\Gamma, A\Gamma$ αντίστοιχα να δείξετε ότι $AK=AM$.

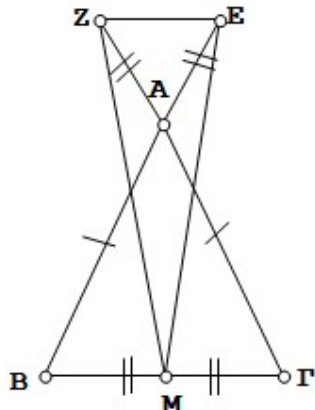
6. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του AK . Αν $AB=B\Delta$ και $A\Gamma=\Gamma E$ να αποδείξετε ότι Δ και E απέχουν ίση απόσταση από την ευθεία $B\Gamma$.



7. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma$ είναι τυχαίο τρίγωνο με $A\Delta=AB$, $A\Gamma=AE$ και $A\Delta \perp AB$, $A\Gamma \perp AE$. Να δείξετε ότι $\Gamma\Delta=BE$.



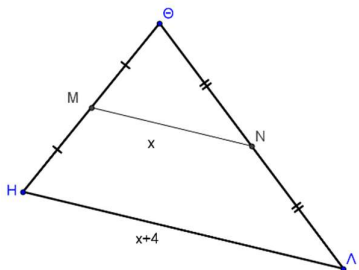
8. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές τρίγωνο ($AB=AG$), M μέσο της $B\Gamma$ και $AZ=AE$. Να δείξετε το τρίγωνο MZE είναι ισοσκελές.



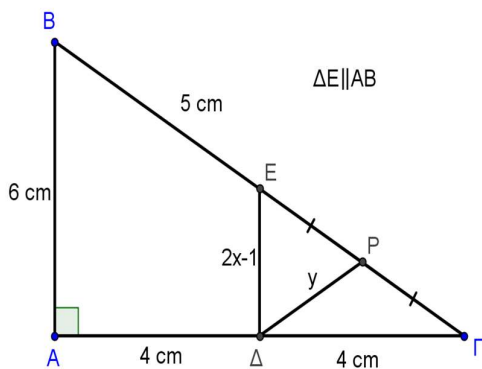
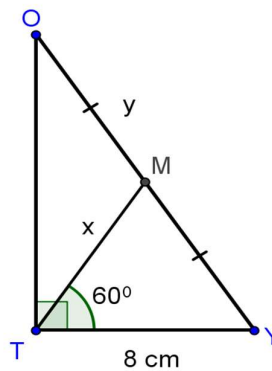
9. Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνετε τη $\Delta\Gamma$ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\Delta\Gamma=\Gamma E$. Να αποδείξετε ότι $ABE\Gamma$ παραλληλόγραμμο.
10. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Αν η παράλληλη από το E προς τη $B\Gamma$ τέμνει την AB στο Z , να αποδείξετε ότι:
 1) $BZED$ παραλληλόγραμμο
 2) $AE=BZ$
11. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, M είναι το μέσο της $A\Delta$. Φέρουμε την BM και την προεκτείνουμε κατά τμήμα $BM=ME$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $ABDE$ είναι παραλληλόγραμμο.
12. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Προεκτείνουμε την AB κατά τμήμα $A\Delta=AB$ και την $A\Gamma$ κατά τμήμα $AE=AG$. Να δείξετε ότι το $B\Gamma\Delta E$ είναι ορθογώνιο.
13. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Αν τα σημεία Δ, E, Z είναι τα μέσα των πλευρών $AB, B\Gamma, A\Gamma$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $A\Delta E Z$ ορθογώνιο.
14. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του $A\Delta$.
 1) Αν E και Z είναι τα μέσα των AB και $A\Gamma$ να δείξετε ότι $A\Delta Z$ ορθογώνιο.
 2) Αν M είναι το μέσο της EZ να δείξετε ότι $\Delta M = \frac{B\Gamma}{4}$.
15. Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τα μέσα E και Z είναι των $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Αν η EZ τέμνει τη διαγώνιο $A\Gamma$ στο H , να αποδείξετε ότι $\Gamma H = \frac{A\Gamma}{4}$.

16. Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τα χ και γ

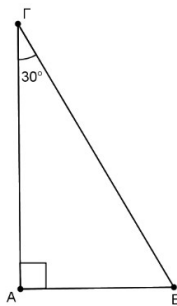
1)



2)



17. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Το σημείο M είναι το μέσο της $B\Gamma$ και Δ το μέσο της BM .



α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο AMB είναι ισόπλευρο.

β) Να φέρετε τις αποστάσεις $M\Theta$ και MH του σημείου M από τις πλευρές $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα και να δείξετε ότι:

i) το τετράπλευρο $A\Theta M H$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και

ii) $\hat{\Gamma}\hat{\Theta}M = \hat{B}\hat{M}H$.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Ε. ΕΥΘΕΙΑ

1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ_1 η οποία περνά από το σημείο $A(0,5)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία ϵ_2 η οποία περνά από τα σημεία $B(-3,1)$ και $\Gamma(-1,-5)$.

2. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές και $A(3, 5), B(1,1) \Gamma(7, 3)$

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της διαμέσου AM (όπου M είναι το μέσο της $B\Gamma$) είναι η $3\chi + \psi = 14$.

3. Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα εξισώσεων.

$$4\chi - 3\psi = -20$$

$$6\chi + 5\psi = 8$$

4. Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο ευθειών (τέμνονται, παράλληλες ή ταυτίζονται) $\chi + 4\psi = -8$ και $5\chi + 2\psi = 14$ και αν τέμνονται να βρείτε το σημείο τομής τους.

5. Να βρεθεί ο a ώστε οι ευθείες $y = 2\chi - 5$ και $y - (2a - 7)\chi = 9$ να είναι :

1) παράλληλες

2) κάθετες

6. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών στις πιο κάτω περιπτώσεις:

α) περνά από το σημείο $A(-1,3)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $\psi = 2\chi - \frac{2}{5}$.

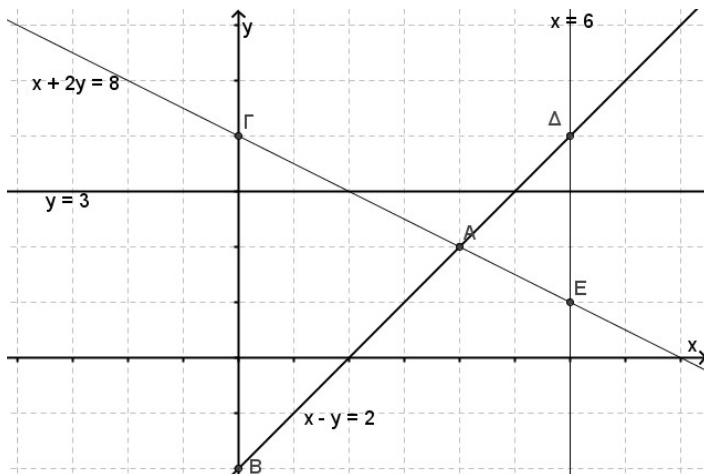
β) περνά από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη με την ευθεία $3\chi - \psi - 1 = 0$.

γ) περνά από τα σημεία $B(-3,2)$ και $\Gamma(2,2)$.

δ) περνά από το σημείο $A(-2,1)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $\chi = -7$.

ε) περνά από το σημείο $\Delta(-1,4)$ και είναι κάθετη με την ευθεία $2\chi - 4\psi = 7$.

7. Δίνονται οι πιο κάτω γραφικές παραστάσεις:



Με τη βοήθεια των πιο πάνω γραφικών παραστάσεων να λύσετε τα πιο κάτω συστήματα :

i) $x + 2y = 8$
 $x - y = 2$

ii) $y = 3$
 $x - y = 2$

iii) $x = 6$
 $x + 2y = 8$

iv) $y = 0$
 $x + 2y = 8$

v) $x = 0$
 $x - y = 2$

8. Να λύσετε τα συστήματα:

1) $x - y = 9$
 $x + y = 13$

2) $3x - y = 12$
 $2x + 3y = 19$

3) $2\alpha - 3\beta = -6$
 $\alpha - 2\beta = -5$

4) $3\varphi + 5\omega = 50$
 $4\varphi + 3\omega = 41$

5) $\frac{2x}{5} - \frac{y}{3} = \frac{8}{3}$
 $x = 2(y + 1)$

6) $\frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 17$
 $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 12$

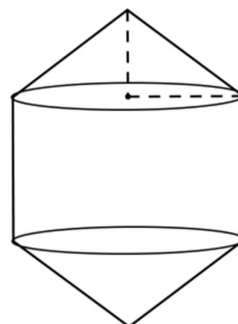
9. Δίνεται η ευθεία $(\lambda + \mu)x + (2\mu - \lambda)y = 3$. Να βρεθούν οι αριθμοί λ και μ ώστε η πιο πάνω ευθεία να διέρχεται από τα σημεία $(2,5)$ και $(-1,-7)$.

10. Σε μια κατασκήνωση υπάρχουν 260 παιδιά ,τα οποία μένουν σε 50 σκηνές των 4 ατόμων και 6 ατόμων. Αν όλες οι σκηνές είναι γεμάτες να βρείτε πόσες είναι οι σκηνές των 4 ατόμων και 6 ατόμων.

11. Ο κερματοδέκτης ενός μηχανήματος πώλησης αναψυκτικών δέχεται κέρματα του ενός ευρώ και δύο ευρώ. Όταν ανοίχτηκε, διαπιστώθηκε ότι περιείχε 80 κέρματα συνολικής αξίας 95 ευρώ. Πόσα κέρματα από κάθε είδος υπήρχαν;
12. Σε ένα τηλεοπτικό παιχνίδι σε κάθε παίκτη υποβάλλονται 10 ερωτήσεις και για κάθε σωστή απάντηση προστίθενται βαθμοί, ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρούνται βαθμοί. Κάποιος παίκτης έδωσε 7 σωστές απαντήσεις και συγκέντρωσε 52 βαθμούς ενώ κάποιος άλλος απάντησε σωστά 4 ερωτήσεις και πήρε 4 βαθμούς συνολικά. Πόσους βαθμούς παίρνει για κάθε σωστή απάντηση και πόσους βαθμούς του αφαιρούνται για κάθε λανθασμένη απάντηση;
13. Δίνεται το τρίγωνο ABΓ με κορυφές A(1,4) B(-2,5) και Γ(-1,3).
- Να υπολογίσετε τις κλίσεις των πλευρών του τριγώνου.
 - Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
 - Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΓΔ του τριγώνου.
 - Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ.
 - Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΑΜ.

ΣΤ. ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

- Δίνεται κώνος με όγκο $V = 240\pi \text{ m}^3$ και ύψος $u = 5 \text{ m}$. Να υπολογίσετε:
 - Την ακτίνα της βάσης.
 - Το μήκος της γενέτειρας του.
 - Αν η κυρτή του επιφάνεια θα επενδυθεί με αυτοκόλλητο χαρτί που στοιχίζει € 10 το κάθε τετραγωνικό μέτρο, να υπολογίσετε το συνολικό κόστος του αυτοκόλλητου χαρτιού.
- Το πιο κάτω στερεό αποτελείται από ένα κύλινδρο και δύο ίδιους κώνους ενωμένους στις βάσεις τους. Ο όγκος του κυλίνδρου είναι ίσος με $640\pi \text{ m}^3$ και το ύψος του είναι 10 m . Αν η γενέτειρα του κώνου ισούται με το ύψος του κυλίνδρου να βρείτε:
 - τον όγκο του στερεού και
 - το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του στερεού.



3. Ορθό πρίσμα έχει $u = 8\text{m}$ και βάση τετράγωνο πλευράς 6m . Να βρείτε:
- το εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας
 - το εμβαδόν ολικής επιφάνειας και
 - τον όγκο του.
4. Η βάση ορθού τριγωνικού πρίσματος είναι ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 5m και 12m . Αν το εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας είναι 270m^2 , να βρεθεί το εμβαδόν ολικής επιφάνειας και τον όγκο του.
5. Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει όγκο 42m^3 και οι δύο από τις τρεις διαστάσεις του είναι 2m και 3m . Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.
6. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κύβου με ακμή $a = 2\text{cm}$.

7. Στο διπλανό σχήμα $AG = 20\text{cm}$ και $\widehat{BAG} = 30^\circ$.

(α) Να υπολογίσετε το εμβαδό ολικής επιφάνειας του κώνου E_1 , δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

(β) Κύλινδρος έχει την ίδια ακτίνα με τον πιο πάνω κώνο, και ο λόγος του εμβαδού ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου E_2 προς το εμβαδό ολικής επιφάνειας του κώνου E_1 είναι $\frac{E_1}{E_2} = \frac{3}{5}$.

Να υπολογίσετε το ύψος u του κυλίνδρου.

